ESTUDIO DE LA ELIPSE

Experimento creado por: Mª Mercedes Menéndez Fortes

Introducción | Actividades | Evaluación | Conclusión

Introducción

LA ELIPSE

1.Definiciones:

i. Sean F y F' dos puntos de un plano ($F \neq F'$). Se define la ELIPSE de focos F y F' como el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a los focos es constante e igual a 2a (a > 0).

ii. Las rectas: La que pasa por los focos F y F' y la recta mediatriz del segmento $\overline{F'F}$ se llaman EJES DE SIMETRÍA DE LA ELIPSE.

iii. El punto de intersección O de los dos ejes de simetría, se llama CENTRO DE LA ELIPSE. Los puntos A', A, B y B' se llaman VERTICES DE LA ELIPSE.

Si el segmento $\overline{A'A}$ es mayor que el segmento $\overline{B'B}$, ambos segmentos se llaman respectivamente EJE MAYOR y EJE MENOR de la elipse.

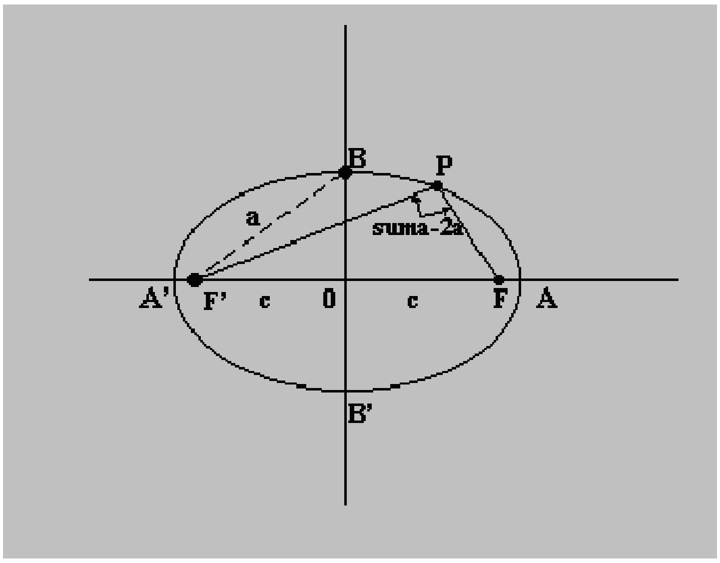


fig. 6.2.1.

Observaciones:

i. De hecho, cualquier par de puntos del plano pueden servir como focos de una elipse. Por simplicidad, solo se considerarán inicialmente aquellos casos en los cuales los focos están en el mismo eje (eje x, eje y) y son simétricos uno del otro con respecto al origen (fig. 6.2.2.).

ii. Nótese también que como $\overline{FB} = \overline{F'B} = a$, se sigue que $\overline{B'0} = \overline{0B} = b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (teorema de Pitágoras).

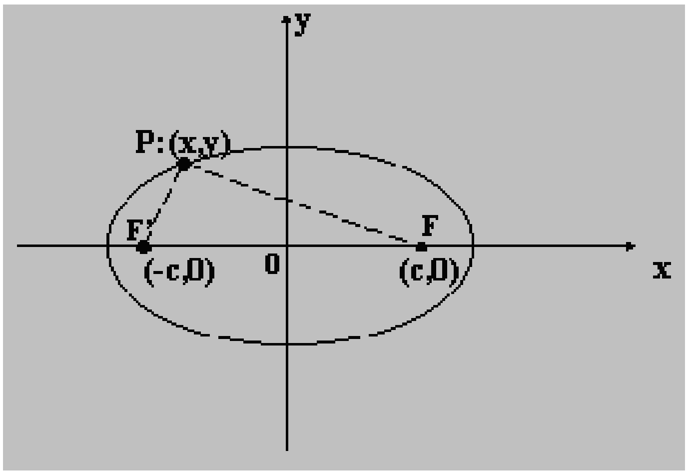


fig. 6.2.2.

2. Ecuaciones Analíticas de la Elipse

Caso 1. Elipses con focos. F'(-c, 0) y F(c, 0) ; c > 0

Eje mayor: Longitud 2a (2a > 0)
Eje menor: Longitud 2b (2b > 0)

TEOREMA:

La ecuación de la elipse con focos en los puntos F'(-c, 0) y F(c, 0), eje mayor 2a, y eje menor 2b, (fig. 6.2.3.) viene dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

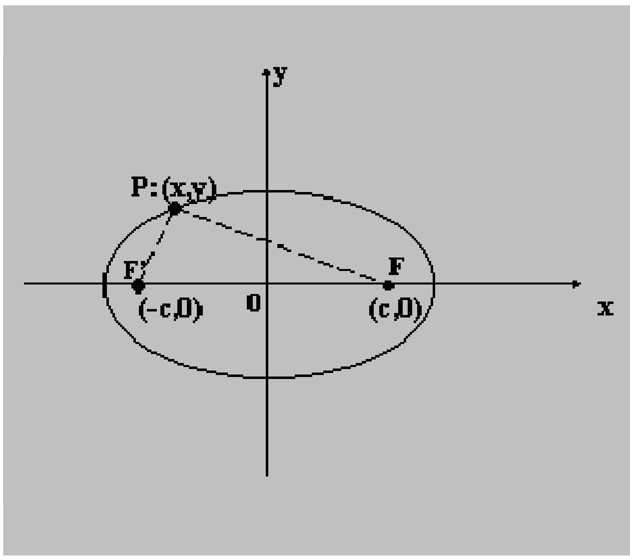


fig. 6.2.3.

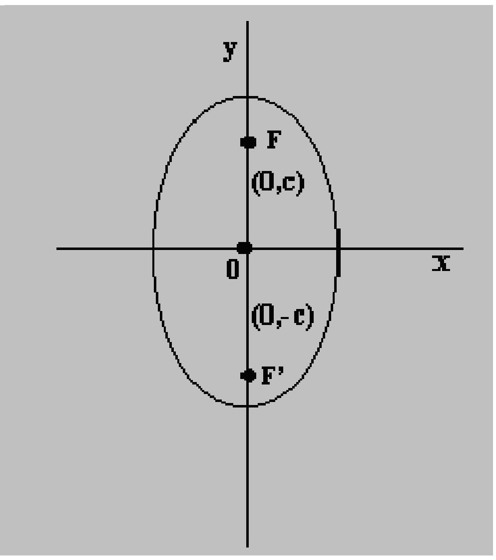


fig. 6.2.4.

Demostración

Si p(x, y) es un punto que pertenece a la elipse considerada, se tiene de acuerdo a la definición **i** que $\overline{FP} + \overline{F'P} = 2a$, o equivalentemente, $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$ (fórmula de distancia entre dos puntos)

Transponiendo el primer radical al segundo lado y elevando ambos miembros al cuadrado, se obtiene: $x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$

Simplificando la última igualdad se llega a:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Al elevar nuevamente ambos miembros al cuadrado en la última ecuación, se obtiene:

$$a^2\left(x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

La cual se reduce a:

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$$

Recordando además que $a^2 - c^2 = b^2$ y al dividir ambos miembros de la última igualdad por a^2b^2, se obtiene finalmente $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: que corresponde a la ecuación pedida.

Caso 2. Elipses con focos F'(0, -c) y F(0, c) ; c > 0
Eje mayor: Longitud 2a (a > 0)
Eje menor: Longitud 2b (b > 0)

TEOREMA:

La ecuación de la elipse con focos en los puntos F'(0, -c) y F(0, c), eje mayor 2a, y, eje menor 2b (fig. 6.2.4.), viene dada por:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (2)$$

Demostración:

Es similar a la anterior.

NOTA:

Nótese que si en las ecuaciones (1) y (2) de la elipse, se hace a = b, las ecuaciones se transforman en la ecuación de una circunferencia de centro en el origen y radio a.

Caso 3. (Caso General).

Si en vez de considerar el centro de la elipse en el punto (0, 0), como se hizo en los dos casos anteriores, se considera el punto C (h, k), la ecuación de la elipse correspondiente, se transforma utilizando las ecuaciones de traslación (sección 6.1.2.) en:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad (3)$$

Si a > b, el eje focal es paralelo al eje x. (sobre la recta y = k)
Si b > a, el eje focal es paralelo al eje y. (sobre la recta x = h)

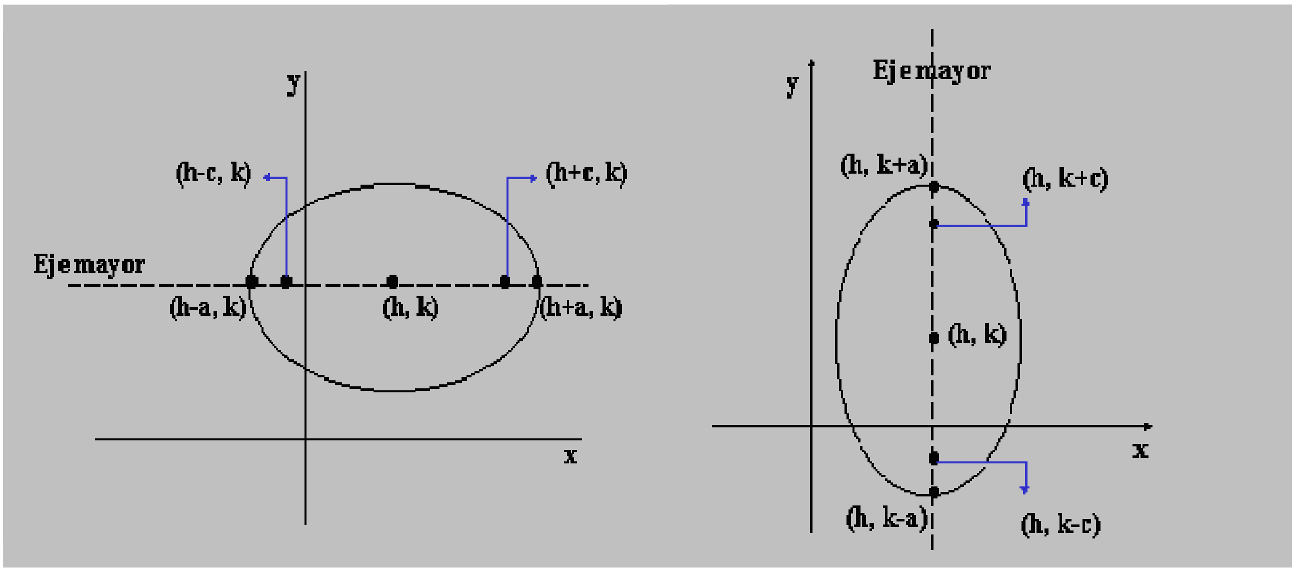


fig. 6.2.5.

(a) $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (b) $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

€**Observaciones:**

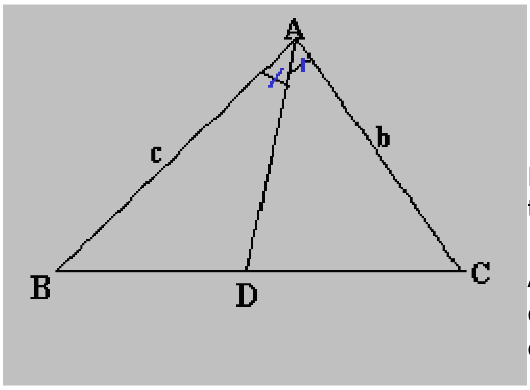
i. La ecuación (3) se deduce considerando que los ejes de la elipse son paralelos a los ejes coordenados.

ii. Si a > b, la ecuación (3) corresponde a una elipse con centro en C(h, k) y cuyo eje focal es paralelo al eje x (fig. 6.2.5. a).

Si b > a, la ecuación (3) corresponde a una elipse con centro en C(h, k) y cuyo eje focal es paralelo al eje y (fig. 6.2.5. b).

3. Propiedad Óptica de la Elipse

En geometría plana se demuestra el siguiente resultado: Si se tiene un triángulo *ABC* y un punto *D* sobre *BC* (ver figura 6.5.11), entonces:



$\overline{AD}$ es Bisectriz del ángulo $BAC \Leftrightarrow \dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \dfrac{c}{b}$.

Esta propiedad permite construir la normal y por ende la tangente en un punto cualquiera de la elipse.

Al unir el punto *P1* de la elipse con *F'* y con *F*, puede demostrarse que la bisectriz del ángulo $F'P_1F$ es la normal *nn* a la curva por P_1 (fig. 6.5.12.).

fig. 6.5.11.

Esta propiedad se conoce como la propiedad óptica o focal de la elipse y tiene interesantísimas aplicaciones:

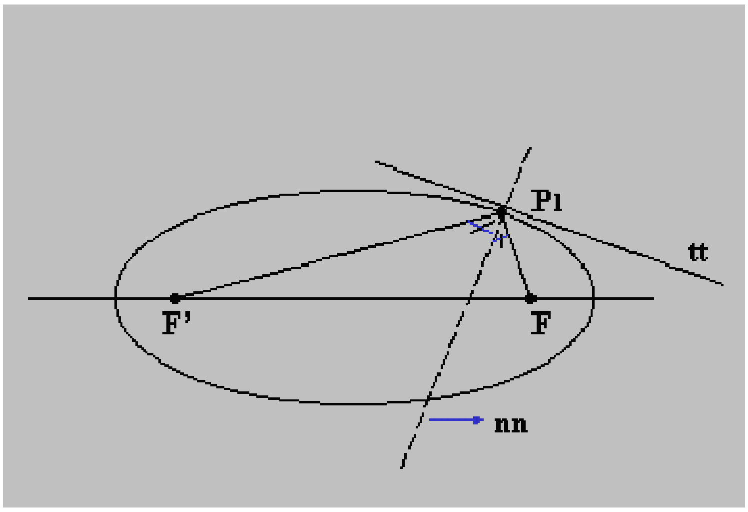


fig. 6.5.12.

1) Considérese un rayo de luz que se enfoca desde un foco hacia un punto P_1 de la curva. Como *nn* es bisectriz del ángulo $F'P_1F$, entonces, ángulo de incidencia = ángulo de reflexión y por tanto el rayo se reflejará pasando por el otro foco. Este hecho es utilizado en la construcción de conchas acústicas:

Supongamos que la elipse se hace rotar alrededor del eje *x* formando una superficie de revolución e imaginemos un salón cuyos techos y paredes son la superficie anterior. Cuando una persona habla desde un foco F, puede ser escuchada en el otro foco a pesar de estar muy lejos del anterior y puede no ser audible en otros puntos intermedios a causa de que las ondas de sonido chocan contra las paredes y son reflejadas en el segundo foco y llegan a él en el mismo tiempo ya que ellas viajan el mismo tiempo.

2) Estudiando una gran cantidad de datos experimentales, Kepler (1571 - 1630) determinó empíricamente los tres siguientes hechos sobre el movimiento de los planetas conocidos como las leyes de Kepler:

1. La órbita de cada planeta es una elipse con el sol en uno de los focos.

2. El radio vector trazado desde el sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

3. Los cuadrados de los períodos de los planetas son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de la órbita elíptica.

Newton (1642 - 1727) partiendo de estas tres leyes empíricas y utilizando elementos del cálculo diferencial e integral pudo deducir la ley de gravitación universal: "la fuerza que ejerce el sol so- bre un planeta es una fuerza de atracción radial e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los dos centros del sol y del planeta y viene dada por $F = \frac{\gamma m M}{r^2}$ donde *m*: masa del planeta, *M*: masa del sol y γ constante de gravitación universal".

Fijadas la directriz, el foco *F* y la excentricidad ε, sabemos que si llamamos p: distancia foco - directriz, la ecuación de la elipse es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1) donde $a = \frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2}$ y $b = \frac{\varepsilon p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ donde como se puede demostrar fácilmente que *a* > *b*.

Ahora, cuando $\varepsilon \to 0$, dejando fijos los demás elementos; directriz, foco y *p*, la elipse se aproxima a una circunferencia y por tanto la órbita es cada vez mas cercana a una circunferencia En efecto:

$$a^2 - b^2 = \frac{\varepsilon^2 p^2}{\left(1-\varepsilon^2\right)^2} - \frac{\varepsilon^2 p^2}{1-\varepsilon^2} = \frac{\varepsilon^2 p^2}{1-\varepsilon^2}\left[\frac{1}{1-\varepsilon^2} - 1\right] = \frac{\varepsilon^4 p^2}{\left(1-\varepsilon^2\right)^2}.$$

Si $\varepsilon \to 0, \left(1-\varepsilon^2\right)^2 \to 1$ y $\varepsilon^4 p^2 \to 0$ y por tanto, a y b se acercan al mismo valor y la ecuación (1) tiende a ser la ecuación de una circunferencia.

Esto puede verse también en el siguiente cuadro.

p = 1

ε	$a = \frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2}$	$b = \frac{\varepsilon p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$
0.5	0.6666	0.57735
0.4	0.4762	0.4364
0.2	0.2083	0.2041

0.1	0.1010	0.1005
0.01	0.0100	0.0100
0.002	0.002	0.002
0.001	0.001	0.001

Muchos de los planetas incluyendo la tierra tienen órbitas que son aproximadamente circulares:

Mercurio	0.21	Saturno	0.06
Venus	0.01	Urano	0.05
Tierra	0.02	Neptuno	0.01
Marte	0.09	Plutón	0.25
Júpiter	0.05		

Uno de los objetos mas importantes del sistema solar es el cometa Halley que tiene una excentricidad de $\varepsilon = 0.98$ y una órbita de alrededor de 7 U.A. de ancho x 35 U.A. de largo (1 U.A.: 150 millones de kilómetros = semieje mayor de la órbita de la tierra » distancia tierra - sol). El período de revolución de este cometa es de 76 años. Fue observado por el astrónomo Edmund Halley en 1682 el cual predijo que volvería a aparecer en 1758. Así efectivamente fue pero Halley no pudo ver verificada su predicción ya que murió en 1742. Esta periodicidad de la órbita del Halley fue uno de los sucesos más convincentes a favor de la teoría de Gravitación de Newton.

Volver a introducción

Actividades del experimento

1. Utiliza los deslizadores **a** y **b**, correspondientes a las coordenadas del centro de la elipse, para ver la forma en que se desplaza.
2. Utiliza los deslizadores **m** y **n**, correspondientes a las longitudes de los semiejes, para ver cómo influyen en la forma de la elipse

Volver a introducción

Evaluación

Es una autoevaluación que necesitará completar con el criterio de evaluación de cada item en las diferentes celdas. (Los que se muestran son un ejemplo, debes añadir los adecuados).

Aspectos a valorar	**Baja/Incorrecta**	**Media/Normal**	**Alta/Correcta**
Compromiso con las actividades	Actitud poco responsable	Actitud normal	Pone mucho interés en la actividad
Entendimiento de la elipse y sus elementos	Grandes dificultades para comprenderlos	Comprensión básica de los conceptos	Es capaz de sacar conclusiones de los conceptos aprendidos
Compresión de la propiedad de los focos de la elipse	Grandes dificultades para comprenderlos	Comprensión básica de los conceptos	Es capaz de sacar conclusiones de los conceptos aprendidos

Volver a [introducción]

Conclusión

Después de haber completado las actividades anteriores el alumno debería tener una idea clara del concepto de la cónica que se trabaja en la unidad y de la influencia de los distintos parámetros en la posición y forma de la elipse.

El trabajo interactivo, dinámico y visual pretende facilitar al alumno la adquisición y compresión de una de las propiedades de la elipse relacionada don la refracción de los rayos emitidos desde una de los focos.

Volver a [introducción]