VECTORI

Lecţie proiectată de:Profesor Zepişi Simona

Grupul Şcolar „Voievodul Mircea” Targoviste

RENE DESCARTES

Introducere | Activităţi | Evaluare | Concluzii

Introducere

Rene Descartes – matematician, filozof şi fizician francez,care a adus contribuții deosebite la crearea geometriei analitice, a pus în evidență o metodă prin care problemele de geometrie sunt reduse la probleme de algebră.

Pe parcursul lecției se vor pune în evidență coordonatele sumei a doi vectori, a produsului unui vector cu un scalar, coordonatele mijlocului unui segment, coordonatele punctului care împarte segmentul într-un raport dat, coordonatele centrului de greutate al unui triunghi. Se vor efectua exerciții pentru fixarea cunoştințelor, în vederea aplicării eficiente a acestora pe parcursul unității de învățare.

Competențe generale:

- Descrierea unei configurații geometrice analitic sau utilizând vectori;
- Exprimarea analitică, sintetică sau vectorială a caracteristicilor matematice ale unei configurații geometrice,
- Modelarea unor configurații geometrice analitic, sintetic sau vectorial.

Competențe generale:

- Identificarea unor date şi relații matematice şi corelarea lor în funcție de contextul în care au fost definite;
- Utilizarea algoritmilor şi a conceptelor matematice pentru caracterizarea locală sau globală a unei situații concrete;
- Analiza şi interpretarea caracteristicilor matematice ale unei situații problemă.

Rezultate aşteptate:

La sfârşitul celor două ore, elevii vor fi capabili să aplice formulele pentru coordonatele sumei a doi vectori, ale unui vector cu un scalar, coordonatele mijlocului unui segment, coordonatele punctului care împarte segmentul într-un raport dat, coordonatele centrului de greutate al unui triunghi.

Metode şi procedee utilizate:

- conversația introductivă pentru pregătirea elevilor pentru activitate;
- explicația;
- demonstrația;
- chestionarea orală.

Mijloace de învățare utilizate:

- manuale alternative;
- Internet;
- aplicația *Cabri Geometry II*.

Strategii didactice folosite:

- strategii algoritmice;
- strategii euristice.

Durata de desfăşurare:

- 2 ore

sus

Activitățile experimentului

Demersuri didactice:

1. Pregătirea clasei pentru activitate

2. Verificarea temei pentru acasă

3. Captarea atenției: Rene Descartes – matematician, filozof şi fizician francez, care a adus contribuții deosebite la crearea geometriei analitice, a pus în evidență o metodă prin care problemele de geometrie sunt reduse la probleme de algebră.

4. Scopul lecției: se vor prezenta formulele pentru suma a doi vectori, coordonatele mijlocului unui segment, coordonatele punctului care împarte segmentul într-un raport dat, coordonatele centrului de greutate al unui triunghi.

5. Reactualizarea fondului perceptiv necesar predării noului conținut: reper cartezian în plan, descompunerea unui vector după axele de coordonate, coordonatele vectorului de poziție.

6. Desfăşurarea lecției:

Fie $\vec{v}$ **un vector, având ca reprezentant segmentul orientat** $\vec{AB}$ **.**

Din egalitatea $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ **se obține:** $\vec{AB} = (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$ **.**

Numerele $x_2 - x_1, y_2 - y_1$ **se numesc coordonatele vectorului** $\vec{v}$ **în reperul cartezian (O,** $\vec{i}, \vec{j}$ **) şi se scrie** $\vec{v}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Dacă $\alpha \in R$ **, atunci** $\alpha\vec{AB} = \alpha(x_2 - x_1)\vec{i} + \alpha(y_2 - y_1)\vec{j}$ **, iar coordonatele vectorului** $\alpha\vec{AB}$ **sunt** $\alpha(x_2 - x_1), \alpha(y_2 - y_1)$.

Fie $\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ **.**

Atunci $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + x_2\vec{i} + y_2\vec{j} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$ **.**

Numerele $x_1 + x_2, y_1 + y_2$ **sunt coordonatele vectorului** $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ **.**

***Aplicații*: 1.** Fie în reperul cartezian (O, $\vec{i}, \vec{j}$) punctele A(3,1), B(-2,0), C(4,3), D(4,6).

a) Determinați coordonatele vectorilor: $\vec{AB}, \vec{CD}, \vec{BC}, \vec{AC}$.

b) Determinați coordonatele vectorilor $\vec{AB} + \vec{OC}, 2\vec{BC} + 3\vec{AC}, \vec{AC} - 2\vec{CD}$.

2. Calculați $\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 + 3\vec{v}_2, 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2$**,** unde $\vec{v}_1 = 3\vec{i} + 2\vec{j}, \vec{v}_2 = 5\vec{i} - 7\vec{j}$

Vor fi rezolvate exercițiile la tablă.

APLICAȚII

I. Mijlocul unui segment

Se va utiliza applet-ul realizat cu ajutorul aplicației *Cabri Geometry II*. Elevii vor fi solicitați să observe ce se întâmplă cu coordonatele mijlocului segmentului, dacă vor schimba coordonatele capetelor segmentului.

Elevii vor observa prin intermediul tabelului, al figurii şi vor reține: coordonatele mijlocului unui segment sunt egale cu mediile aritmetice ale coordonatelor capetelor segmentului.

Profesorul va realiza la tabla demonstrația.

Fie $A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2)$ două puncte în plan şi M mijlocul segmentului $[AB]$.

$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$. Cum $\vec{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \vec{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, se obține $\vec{OM} = \frac{x_1 + x_2}{2}\vec{i} + \frac{y_1 + y_2}{2}\vec{j}$. Deci vectorul $\vec{OM}$ are coordonatele $\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}$ şi avem M($\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}$).

Aplicații: Fie în reperul cartezian (O, $\vec{i}, \vec{j}$) punctele A(3,1), B(-2,0), C(4,3). Determinați coordonatele mijloacelor segmentelor $[AB], [CB], [AC]$.

Vor fi rezolvate exercițiile la tablă.

II. Coordonatele punctului care împarte un segment într-un raport dat.

Fie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ două puncte în plan şi M care împarte segmentul $[AB]$ în raportul k, $\vec{AM} = k\vec{MB}$.

Avem $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + k\vec{OB}}{1+k}$. Cum $\vec{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \vec{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, se obține $\vec{OM} = \frac{x_1 + kx_2}{1+k}\vec{i} + \frac{y_1 + ky_2}{1+k}\vec{j}$.

Deci vectorul $\vec{OM}$ are coordonatele $\frac{x_1 + kx_2}{1+k}, \frac{y_1 + ky_2}{1+k}$ si avem M($\frac{x_1 + kx_2}{1+k}, \frac{y_1 + ky_2}{1+k}$).

Aplicații: Fie în reperul cartezian (O,$\vec{i}$, $\vec{j}$) punctele A(3,1), B(-2,0), C(4,3), D(4,6).

a) Determinați coordonatele punctului P şi coordonatele vectorului $\vec{AP}$, ştiind că $\vec{AP} = 4\vec{PB}$.

b) Determinați coordonatele punctului Q şi coordonatele vectorului $\vec{CQ}$ ştiind că $\vec{CQ} = 2\vec{ND}$.

Exercițiile vor fi rezolvate la tablă.

III. Centrul de greutate al unui triunghi

Se va utiliza applet-ul realizat cu ajutorul aplicației *Cabri Geometry II*. Elevii vor fi solicitați să observe ce se întâmplă cu coordonatele centrului de greutate, daca vor schimba coordonatele vârfurilor triunghiului. Elevii vor observa şi vor reține: coordonatele centrului de greutate al unui triunghi sunt egale cu mediile aritmetice ale coordonatelor vârfurilor triunghiului.

Profesorul va realiza la tabla demonstrația.

Fie triunghiul ABC cu vârfurile $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ şi punctul G centrul de greutate al triunghiului.

Ştim că are loc relația: $\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$. Cum $\vec{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $\vec{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, $\vec{OC} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j}$, se obține

$$\vec{OG} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\vec{i} + \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\vec{j}.$$

Deci vectorul $\vec{OG}$ are coordonatele $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$ si avem G($\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$).

Aplicații: Fie în reperul cartezian (O,$\vec{i}$, $\vec{j}$) punctele A(3,1), B(-2,0), C(4,3). Determinați coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC, OAB, respectiv OGC, unde G este central de greutate al triunghiului ABC.

Exercițiile vor fi rezolvate la tabla.

PROBLEMA: Fie triunghiul ABC, $M \in (AB), N \in (BC), P \in (CA)$ care împart laturile triunghiului în acelaşi raport k. Să se

demonstreze că triunghiurile ΔABC şi ΔMNP au acelaşi centru de greutate.
Pentru înțelegerea se memorarea proprietății, se va utiliza applet-ul realizat cu ajutorul aplicației *Cabri Geometry II*. Elevii vor observa că centrele de greutate coincid.
Se va realiza la tablă, cu ajutorul elevilor, demonstrația propriu zisă a problemei.

7. Fixarea cunoştințelor se realizează printr-o fişă de muncă independentă, care va fi prezentată elevilor cu ajutorul video-proiectorului.
Fie triunghiul ABC, A(2,1), B(5,3), C(4,2)
a) Determinați coordonatele vectorilor $\vec{AB}, \vec{BC}, 2\vec{BC}, \vec{AC}+3\vec{OB}, \vec{AM}-\vec{BC}$ unde M este mijlocul segmentului $[AB]$;
b) Determinați coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC, respectiv OBC, respectiv MAC;
c) Determinați coordonatele punctului P şi coordonatele vectorului $\vec{AP}$, ştiind că $\vec{AP}=4\vec{PB}$.
d) Dacă $P \in (AB), Q \in (BC), R \in (CA)$ împart laturile triunghiului în raportul $k=4$, arătați că triunghiurile ΔABC şi ΔPQR au acelaşi centru de greutate.

8. Tema pentru acasă: 8/384, 9/384, 10)a)/385, 14/385, 15/385

9. Evidențierea elevilor care au fost activi în timpul orei se face prin notare sau aprecieri verbale.

Activitățile de învățare proiectate pentru elevi sunt:

- Fixarea şi aplicarea formulelor pentru coordonatele sumei a doi vectori;
- Fixarea şi aplicarea formulelor pentru coordonatele produsului unui vector cu un scalar;
- Fixarea şi aplicarea formulelor pentru coordonatele punctului care împarte un segment într-un raport dat;
- Observarea valorilor coordonatelor mijlocului unui segment atunci când sunt modificate pozițiile capătului segmentului (*Cabri Geometry II*);
- Fixarea şi aplicarea formulelor pentru coordonatele mijlocului unui segment;
- Observarea valorilor coordonatelor centrului de greutate al unui triunghi, atunci când sunt modificate pozițiile vârfurilor triunghiului (*Cabri Geometry II*);
- Fixarea şi aplicarea formulelor pentru coordonatele centrului de greutate al unui triunghi;
- Observarea pozițiilor centrelor de greutate ale unui triunghi dat şi al triunghiului determinat de punctele de pe laturi care împart laturile în acelaşi raport *k* (*Cabri Geometry II*);
- Aplicarea noțiunilor însuşite în rezolvări de probleme;
- Redactarea unor demonstrații utilizând terminologia adecvată.

sus

Evaluare

Evaluarea elevilor se va realiza conform următoarelor criterii:

Rubrică	*Începător*	*Mediu*	*Expert*
Implicarea în activități	Elevii se implică doar în rezolvarea sarcinilor simple	Elevii se implică în rezolvarea sarcinilor de nivel mediu	Elevii se implică în rezolvarea tuturor sarcinilor
Înțelegerea conceptelor	Elevii descriu caracteristicile de bază ale conceptelor într-o manieră limitată. Nu s-a constatat o înțelegere flexibilă a semnificației conceptelor.	Elevii pot defini şi descrie flexibil conceptele folosite, folosind propriile cuvinte. S-a constatat un anumit grad al capacității de aplicare flexibilă şi corectă a conceptelor în situații specifice	Elevii înțeleg pe deplin semnificația conceptelor prezentate, putând să le folosească corect în toate situațiile
Utilizarea terminologiei pe parcursul orei	Nu reuşesc să se exprime în limbajul matematic nou creat	Elevii pot folosi noțiunile folosind propriile cuvinte	Elevii pot sa folosească corect în toate situațiile terminologia adecvată
Utilizarea formulelor pentru coordonatele sumei a doi vectori şi pentru coordonatele produsului unui vector cu un scalar	Elevii reuşesc să aplice formulele doar dacă sunt dați în problemă vectorii respectivi	Elevii reuşesc să aplice formulele doar pentru vectorii cu originea şi vârful date în problemă	Elevii pot aplica formulele în orice context

Utilizarea formulelor pentru coordonatele mijlocului unui segment, respectiv coordonatele centrului de greutate al unui triunghi	Elevii reuşesc să aplice formulele doar pentru notațiile întâlnite în partea teoretică	Elevii reuşesc să aplice formulele pentru orice segmente şi triunghiuri dacă sunt date concret în problemă coordonatele capetelor segmentului sau coordonatele vârfurilor triunghiului	Elevii pot aplica formulele în orice context
Utilizarea formulelor pentru coordonatele punctului care împarte un segment într-un raport dat	Elevii reuşesc să aplice formulele doar pentru notațiile întâlnite în partea teoretică	Elevii reuşesc să aplice formulele pentru orice segmente, dacă sunt date concret în problemă coordonatele capetelor segmentului şi raportul *k*.	Elevii pot utiliza corect formulele, în toate situațiile, inclusiv în cazul general
Observarea primului *applet Cabri*	Elevii remarcă corespondența între valorile coordonatelor şi media aritmetică	Elevii mişcă figura, completează tabelul cu valori şi remarcă corespondența între valorile coordonatelor şi media aritmetică	Elevii remarcă prin calcul direct şi prin mişcarea figurii, formula
Observarea celui de-al doilea *applet Cabri*	Elevii remarcă corespondența între valorile coordonatelor şi media aritmetică	Elevii mişcă figura, completează tabelul cu valori şi remarcă corespondența între valorile coordonatelor şi media aritmetică	Elevii remarcă prin calcul direct şi prin mişcarea figurii, formula
Observarea celui de-al treilea *applet Cabri*	Elevii remarcă faptul că centrele de greutate coincid	Elevii remarcă faptul că centrele de greutate coincid	Elevii remarcă faptul că centrele de greutate coincid

sus

Concluzii

Implementarea la clasă se poate realiza uşor, fără a se pierde foarte mult timp pe parcursul lecției.

Este ideal ca aplicațiile VI să poată fi utilizate foarte des la lecții, mai ales că utilizarea softului nu este atât de dificilă, iar realizarea unui *applet* nu consumă foarte mult timp pentru profesor.

BENEFICII:

- permite realizarea de situații de învățare prin interactivitate;
- utilizatorul poate vizualiza construcţii geometrice cu aceleaşi caracteristici, dar forme diferite;
- prin imaginarea obiectelor, elevii pot înțelege şi retine mai uşor proprietățile;
- pot susține elevii în rezolvarea diverselor probleme de geometrie;
- manipularea dinamică directă a construcțiilor geometrice oferă oportunitatea de a explora figurile geometrice, de a formula şi verifica ipotezele;
- se pot tabela automat date numerice pentru studiul conceptelor geometrice aflate în studiu;
- feed-back-ul vizual şi numeric este un mijloc de comunicare vizuală al ideilor matematice.

sus